

Reasoning: goal trees and problem solving. Конспект.

Введение.

Можем ли мы посчитать интеграл $\int \frac{-5x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$ в уме? Скорее всего нет.

Но можно ли считать программу, решающую эту задачу, разумной?

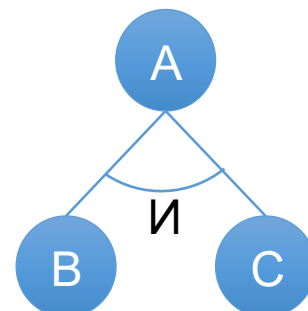
Лекция посвящена моделированию решения задач в том виде, в котором это делает человек. Алгоритм решения задачи символьного интегрирования, который будет рассмотрен на лекции, является общей идеей того, как люди решают задачи.

Декомпозиция задачи символьного интегрирования.

Имеется список табличных интегралов – это знания, то есть задачи, решение которых уже известно. Если свести решение исходной задачи к решению табличных интегралов, то и исходная задача будет решена. Этот процесс называется декомпозицией задачи. Преобразование задачи может быть безопасным и эвристическим. Последние похожи на подход генерации и проверки решений. Разумно сначала применять безопасные преобразования, пока это возможно. Какие преобразования в данной задаче можно считать безопасными?

Безопасные преобразования	
$\int -f(x) dx$	$-\int f(x) dx$
$\int cf(x) dx$	$c \int f(x) dx$
$\int \sum f_i(x) dx$	$\sum \int f_i(x) dx$
$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	Разделить многочлены

Вынесение константы безопасно, так как у полученной задачи есть решение, если оно есть и у исходной. Если представить этот алгоритм в виде дерева, то задачи отвечают вершинам, а преобразование – ребру. Выделяется третье правило: оно разбивает задачу на несколько подзадач. Причем чтобы решить исходную, необходимо решить все подзадачи. Такая вершина называется И-вершиной и обозначается так:



Применим все возможные безопасные преобразования:

$$\int \frac{-5x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx \Rightarrow_1 \int \frac{5x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx \Rightarrow_2 \int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Сначала выносится знак минус, после чего выносится константа. Так как применить безопасные преобразования больше нельзя, то применяется одно их эвристических преобразований.

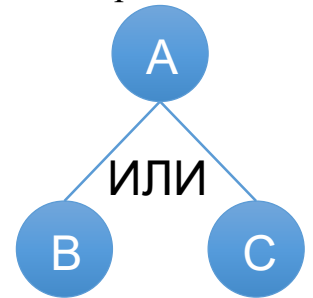
Эвристические преобразования	
$\int f \left(\begin{matrix} \sin x, \cos x, \\ \tan x, \cot x, \\ \sec x, \csc x \end{matrix} \right) dx$	$\int g_1(\sin x, \cos x) dx$ $\int g_2(\tan x, \csc x) dx$ $\int g_3(\cot x, \sec x) dx$
$\int f(\tan x) dx$	$\int \frac{f(y)}{1+y^2} dy$
$1-x^2$ $1+x^2$	$x = \sin y$ $x = \tan y$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx &\Rightarrow_3 \\ &\Rightarrow_3 \int \frac{\sin^4 y}{\cos^4 y} dy \Rightarrow_1 \\ &\Rightarrow_1 \left[\int \frac{1}{\cot^4 x} dx \right. \\ &\quad \left. \int \tan^4 x dx \right] \end{aligned}$$

Последнее преобразование может быть применимо по-разному. При этом, достаточно решить только одну из полученных подзадач. В дереве такая

вершина определяется ИЛИ-вершиной и обозначается как:

Таким образом, все дерево называется И/ИЛИ-деревом или деревом декомпозиции задачи. Какую из полученных подзадач следует решить? Выбор может основываться на стандартных стратегиях поиска: в глубину, в ширину и на основе функции оценки задач. В данном случае в качестве такой функции может быть глубина вложенности композиции функций. Так как ни одно из безопасных преобразований не применимо, то выбирается второе эвристическое преобразование:



$$\int \tan^4 x dx \Rightarrow_2 \int \frac{y^4}{1+y^2} dy$$

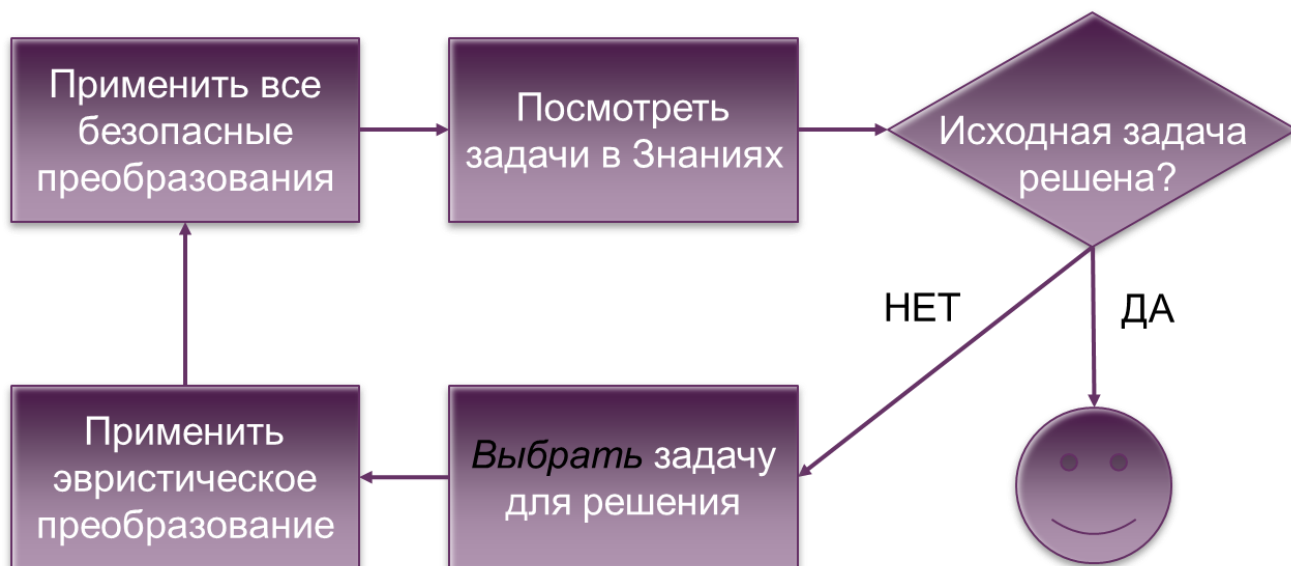
Применив ряд безопасных преобразований получаем И-вершину:

$$\int \frac{y^4}{1+y^2} dy \Rightarrow_4 \int \left(y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2} \right) dy \Rightarrow_{3,1} \int y^2 dy - \int 1 dy + \int \frac{1}{1+y^2} dy$$

Первые два интеграла табличные, поэтому вершины, отвечающие этим подзадачам, являются листьями в И/ИЛИ-дереве. Последняя подзадача с помощью преобразований также сводится к табличному интегралу:

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy \Rightarrow_3 \int 1 dz \Rightarrow_2 z$$

Таким образом, исходная задача является решенной, так как решены все ее подзадачи. Полученный алгоритм можно изобразить в виде схемы:



Заключение.

В 1961 году Джеймс Роберт Слейгл разработал программу SAINT (Symbolic Automatic INTeegrator) для решения задачи символьного интегрирования. Она решила 54 из 56 самых трудных задач. Две неудачи связаны с недостатком преобразований, так что это исключение. Как много знаний было необходимо для этого? Программа состояла из:

- 26 элементов знаний
- 12 безопасных преобразований
- 12 эвристических преобразований

Знание о знании – сила.